Αλγεβρικές Δομές Ι (2018-2019)
Φροντιστηριακές ασκήσεις #3

1. Έστω n, m δύο θετικοί ακέραιοι, και
$$H_1 = n\mathbb{Z} = < n >, \qquad H_2 = m\mathbb{Z} = < m >$$
οι κυκλικές υποομάδες της ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$ οι οποίες παράγονται από τους φυσικούς αριθμούς n, m αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί η ομάδα $H_1 \cap H_2$.

2. Έστω G πεπερασμένη κυκλική ομάδα με ταξη $|G| \geq 3$. Δείξτε ότι το πλήθος των γεννητόρων της G είναι άρτιο.

3. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα και $a, b, x \in G$. Δείξτε ότι
$$\mathrm{ord}(x^{-1} * a * x) = \mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(x * a * x^{-1}), \qquad \mathrm{ord}(a * b) = \mathrm{ord}(b * a).$$
Επίσης δείξτε ότι $\mathrm{ord}(a^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$.

4. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα, H μια υποομάδα της G και $x \in G$. Θέτουμε
$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} : h \in H\}.$$
Δείξτε ότι η xHx^{-1} είναι υποομάδα της G και ότι $\#(xHx^{-1}) = \#H$.

5. Να ευρεθεί η τάξη του στοιχείου a της ομάδος $(G, *)$, όπου
$$\begin{array}{ll} a = [2]_3,\ (G,*) = (\mathbb{Z}_3, +), & a = [6]_{10},\ (G,*) = (\mathbb{Z}_{10}, +), \\ a = i,\ (G,*) = (\mathbb{C}^*, \cdot), & a = -i,\ (G,*) = (\mathbb{C}^*, \cdot), \\ a = -1 + i\sqrt{3},\ (G,*) = (\mathbb{C}^*, \cdot), & a = (-1 + i\sqrt{3})/2,\ (G,*) = (\mathbb{C}^*, \cdot). \end{array}$$

6. Να ευρεθεί η τάξη όλων των στοιχείων της ομάδος $G = (U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$ των αντιστρεψίμων ακεραίων modulo 14. Είναι η ομάδα G κυκλική;

7. Βρείτε το πλήθος των γεννητόρων μιας κυκλικής ομάδας με τάξη n, όταν $n = 5$, $n = 8$, $n = 12$, $n = 60$.

8. Βρείτε όλους τους γεννήτορες της ομάδος $\mathrm{U_m}$ των m-στων ριζών της μονάδας στο $\mathbb{C}$ όταν $m = 4$, $m = 17$, $m = 24$, $m = 31$.

9. Βρείτε όλους τους γεννήτορες των ομάδων $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

10. Ποιές είναι οι δυνατές τάξεις για τις υποομάδες των επόμενων κυκλικών ομάδων
$$(\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Z}_6, +), \quad (\mathbb{Z}_8, +), \quad (\mathbb{Z}_{12}, +), \quad (\mathbb{Z}_{60}, +), \quad (\mathbb{Z}_{17}, +)\ ;$$